

DOI:10.13409/j.cnki.jdpme.20230203001

## 二阶混沌多项式的概率密度精确计算及其结构可靠度应用

刘腾, 翁叶耀, 张玄一, 赵衍刚

(北京工业大学城市建设学部, 北京 100124)

**摘要:** 混沌多项式展开是一种广泛使用的方法,用于建立功能函数的代理模型,以方便对随机结构进行不确定性量化及可靠度分析。然而,在某些可靠度分析问题中经常需要混沌多项式展开模型的概率密度函数作为随机变量的完整表达,但在一般情况下难以准确计算混沌多项式展开模型的概率密度函数。为研究二阶混沌多项式展开模型的概率密度函数计算方法,通过正交变换消除模型中的交叉项,推导出二阶混沌多项式展开其特征函数的显式表达式,然后利用快速傅里叶变换求得二阶混沌多项式展开的概率密度函数,并通过数值算例验证了所提方法在结构可靠度应用中的准确性和适用性。研究表明:所提方法能获得二阶混沌多项式模型的概率密度函数与累积分布函数,计算结果与理论精确解吻合,获得的非中心卡方分布的累积分布函数尾部可与精确值在 $10^{-8}$ 水平上保持一致,且适用于高维情形。同时,所提方法能高效准确地给出不同响应阈值下的结构失效概率,即使是在 $10^{-8}$ 水平上的小失效概率情形。相较于前四阶矩方法,所提方法计算精度更高,对于输出变量具有强非高斯性的情况依然适用。此外,由于二阶混沌多项式展开模型代理强非线性功能函数存在一定误差,因此所提方法对于强非线性问题存在一定局限性。

**关键词:** 结构可靠度; 混沌多项式展开; 特征函数; 概率密度函数; 傅里叶变换

**中图分类号:** U213.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-2132(2024)01-0028-11

### Accurate Calculation of Probability Density for Second-order Chaos Polynomials and Its Application in Structural Reliability

LIU Teng, WENG Yeyao, ZHANG Xuanyi, ZHAO Yangang

(Faculty of Architecture, Civil and Transportation Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract:** Polynomial chaos expansion (PCE) is a widely used approach for establishing the surrogate model of a performance function for the convenience of uncertainty quantification and reliability analysis of a stochastic structure. However, it remains difficult to calculate the probability density function of the PCE accurately for general cases, though the probability density function, as a complete representation of a random variable, is often required in some reliability analysis problems. In order to study the calculation method of the probability density function for the second-order polynomial chaos expansion model, the cross terms in the model are eliminated through an orthogonal transformation.

\* 收稿日期:2023-02-03;修回日期:2023-05-13

基金项目:国家自然科学基金项目(51738001,51820105014,U1934217)资助

作者简介:刘腾(1997—),男,硕士研究生。主要从事结构可靠度方面的研究。E-mail:1191373506@qq.com

通讯作者:翁叶耀(1993—),男,博士研究生。主要从事结构可靠度方面的研究。E-mail:wengyy71@foxmail.com

The explicit formulation of the characteristic function of the second-order PCE is derived and then the corresponding probability density function of the PCE is computed via inverse fast Fourier transformation. The accuracy and applicability of the proposed method for structural reliability problems are verified through numerical examples. The results show that: the proposed method can provide the probability density function and cumulative distribution function of the second-order PCE model, and the calculation results are accurately consistent with the theoretical solution. The tails of the cumulative distribution function of the obtained non-centered chi-square distribution can be consistent with the exact value at the  $10^{-8}$  level and are suitable for high-dimensional cases. At the same time, the proposed method can efficiently and accurately give the structural failure probability at different response thresholds, even in the small failure probability cases. Compared with the first four-moment-based method, the proposed method is of higher accuracy and is applicable to strongly non-Gaussian output variables. In addition, the proposed method has some limitations for strongly nonlinear problems due to the error in the second-order chaos polynomial expansion model to represent strongly nonlinear performance functions. The research results provide a theoretical basis for the uncertainty quantification of PCE models and their application in structural reliability analysis and optimization design.

**Keywords:** structural reliability; polynomial chaos expansion; characteristic function; probability density function; Fourier transformation

## 0 引言

在实际工程结构可靠度分析中,表征结构工作状态的功能函数通常是隐式的,需要调用高耗时的有限元分析。多次调用有限元分析所消耗的计算时间占据着可靠度分析的主要计算成本,其高昂的计算成本甚至可能导致可靠度分析无法实行。目前,代理模型是解决上述难题的有效方法之一,受到越来越多中外学者们的关注。代理模型仅借助少量结构响应分析构建起输入与输出随机变量间的映射关系,代替原本高耗时的功能函数来预测结构性能,进而进行不确定量化及可靠度分析。

常用的代理模型主要包括响应面法<sup>[1-2]</sup>、Kriging模型<sup>[3-4]</sup>、混沌多项式展开(polynomial chaos expansion, PCE)<sup>[5-6]</sup>等。其中,PCE可以将功能函数展开为一系列多元正交多项式,建立输入变量与输出变量间的显式函数关系,具有坚实的数学理论基础,被广泛地应用于不确定量化及可靠度分析中。当前,关于PCE模型的研究主要解决两个问题:正交多项式构建和“维数灾难”问题。对于正交多项式构建,N.Wiener<sup>[7]</sup>以 Hermite 正交多项式为基函数构建PCE模型,但其仅对正态分布类型的输入随机变量具有指数收敛速度。D.Xiu等<sup>[8]</sup>根据 Askey 方案将原混沌多项式理论扩展得到广义混沌多项式(general polynomials chaos)方法,其适用于特定几

种分布类型的输入变量。此外,还发展了许多针对任意分布类型以及原始样本数据的混沌多项式方法<sup>[9-10]</sup>。然而,随着输入随机变量维数的增长,混沌多项式方法的计算量也随之极速增长。为此,学者们提出了多种多项式项截断策略<sup>[11-12]</sup>来剔除PCE模型中的高阶多项式项以缓解“维数灾难”。除了多项式项截断,一些学者还结合多种技术,如LASSO<sup>[13]</sup>、自适应算法<sup>[14-15]</sup>、减维技术<sup>[16]</sup>等来构建稀疏PCE模型,仅保留对输出变量贡献度较大的多项式项。

关于PCE的现有研究主要集中于构建PCE代理模型,在构建完成后仍需结合已有的结构可靠度分析方法才能估算结构失效概率,如一阶可靠度分析方法(first order reliability method, FORM)<sup>[17]</sup>、二阶可靠度分析方法(second order reliability method, SORM)<sup>[18]</sup>,以及蒙特卡洛模拟(Monte Carlo simulation, MCS)<sup>[19]</sup>等数值模拟法。然而上述方法获得的失效概率为功能函数小于零的信息,无法充分地表征功能函数的概率信息。模型输出的概率密度函数(probability density function, PDF)作为概率信息的充分表达,对于基于可靠性的设计优化<sup>[20]</sup>,相关灵敏度分析<sup>[21]</sup>等问题是必要的。因此,许多学者提出了不同的近似方法求解PDF。高阶矩法<sup>[22]</sup>等基于矩的方法主要计算功能函数的前若干阶矩,并根据矩确定功能函数的概率分布及其失效概率。得益于混沌多项式的正交性质,PCE各整数阶矩的

精确值可以通过多项式系数及其期望直接计算得到,结合关于功能函数分布类型的假设(如 Pearson 分布<sup>[23]</sup>、移位广义对数正态分布<sup>[24]</sup>、立方正态分布<sup>[25]</sup>等)即可确定 PCE 的分布。然而,特定的参数化分布模型难以适用于所有情形。X.Wei 等<sup>[26]</sup>根据基于前四阶矩的最大熵原理求得 PCE 的概率密度函数,并对船体表面进行不确定性分析。该方法无需假定功能函数的分布类型,使用前四阶矩信息求解 PDF。然而,随机变量的前四阶矩有时并不足以表征其完整的概率信息。基于前四阶矩的最大熵分布仅适用于窄于高斯的尾部行为<sup>[27]</sup>。

在工程实践中,二阶 PCE 一般便能够较好地拟合实际工程结构的功能函数,描述结构的非线性特征。为此,本文提出了基于二阶 PCE 模型 PDF 精确计算的结构可靠性分析方法。该方法推导出二阶 PCE 特征函数的解析表达式,再通过快速傅里叶变换(fast Fourier transform, FFT)获得二阶 PCE 的精确 PDF,进而求得不同响应阈值下的结构失效概率。并通过数值算例,验证所提方法具有良好的准确性和适用性。

## 1 PCE 的基本原理

对于输入结构的  $d$  维随机向量  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_d\}^T$ , 可以通过正态变换  $T$  (如 Rosenblatt 变换、Nataf 变换) 用相应的独立标准正态随机向量  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d\}^T$  表出, 即  $X = T(\xi)$ 。此时, 结构功能函数  $Z = G(X) = G[T(\xi)] = g(\xi)$ 。

根据 PCE 理论, 功能函数  $Z$  可以展开为一系列关于  $\xi$  的 Hermite 正交多项式, 如下:

$$Z = \sum_{i=0}^{Q-1} c_i H_i(\xi) \quad (1)$$

式中,  $c_i$  是多项式系数;  $H_i(\xi)$  是作为 PCE 基函数的多元 Hermite 多项式, 可表达为:

$$H_i(\xi) = \prod_{k=1}^d h_{\alpha_k}(\xi_k), \quad 0 \leq \sum_{k=1}^d \alpha_k \leq p \quad (2)$$

式中,  $h_{\alpha_k}(\xi_k)$  表示关于  $\xi_k$  的  $\alpha_k$  阶一元 Hermite 多项式;  $p$  是 PCE 的截断阶数。

对于  $p$  阶 PCE, 其多项式项总数记为  $Q$ 。PCE 项数  $Q$  随着 PCE 的截断阶数  $p$  和随机向量  $\xi$  的维数  $d$  的增加而快速增长, 具体关系如下:

$$Q = \frac{(d+p)!}{d!p!} \quad (3)$$

构建 PCE 的关键任务之一是确定系数向量  $c =$

$\{c_1, c_2, \dots, c_{Q-1}\}^T$ , 一般采用最小二乘回归法来确定 PCE 模型系数。假设有  $N$  个  $\xi$  的样本, 记为  $\xi^S = \{\xi_1^S, \dots, \xi_j^S, \dots, \xi_N^S\}$ , 其中第  $j$  个样本点  $\xi_j^S$  表示为  $\xi_j^S = \{\xi_{j1}^S, \dots, \xi_{jd}^S\}^T$ , 此时相应的功能函数响应向量  $Z = \{g(\xi_1^S), \dots, g(\xi_j^S), \dots, g(\xi_N^S)\}^T$ , 将  $\xi^S$  和  $Z$  代入 PCE(公式(1))中:

$$Ac = Z$$

其中,

$$A = \begin{bmatrix} H_0(\xi_1^S) & H_1(\xi_1^S) & \dots & H_{Q-1}(\xi_1^S) \\ H_0(\xi_2^S) & H_1(\xi_2^S) & \dots & H_{Q-1}(\xi_2^S) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0(\xi_N^S) & H_1(\xi_N^S) & \dots & H_{Q-1}(\xi_N^S) \end{bmatrix} \quad (4)$$

称为设计矩阵。根据最小二乘法, 通过使 PCE 在样本点处的预测值与观测值间的残差平方和最小求得系数  $c$ :

$$c = \text{Arg min} \sum_{j=1}^N \left[ g(\xi_j^S) - \sum_{i=0}^{Q-1} c_i H_i(\xi_j^S) \right]^2 \quad (5)$$

求解公式(5), 得到系数向量  $c$  的最小二乘解可表示为:

$$c = (A^T A)^{-1} A^T Z \quad (6)$$

## 2 基于二阶 PCE 模型 PDF 精确计算的结构可靠度方法

### 2.1 二阶 PCE 的特征函数

对于随机变量  $Z$ , 其特征函数  $Q_Z$  定义为:

$$Q_Z(t) = E[\exp(itZ)] \quad (7)$$

式中,  $i = \sqrt{-1}$  为虚数单位。

本文研究对象为基于 Hermite 正交多项式的二阶 PCE 模型, 即  $p=2$ 。根据公式(1)和(2), 功能函数  $Z$  的二阶 PCE 代理模型可表示为:

$$Z = a_0 + \sum_{i=1}^d a_i \xi_i + \sum_{i=1}^d \sum_{j \leq i}^d a_{ij} (\xi_i \xi_j - \delta_{ij}) \quad (8)$$

式中,  $a_0$ 、 $a_i$  和  $a_{ij}$  分别是 PCE 的零阶、一阶和二阶项系数;  $\delta_{ij}$  为克罗内克函数, 当  $i=j$  时值为 1, 否则值为 0。

由于二阶 PCE 模型中包含交叉项  $\xi_i \xi_j$ , 因此直接将公式(8)代入公式(7)所得的多重积分较难求解。本文通过正交变换, 消除 PCE 中的交叉项, 此时  $Q_Z$  的多重积分将转化为多个简单一重积分相乘。设正交变换  $P$ ,  $P$  是一个  $d \times d$  正交矩阵, 即  $P^T P = I$ , 使得  $\xi = P\zeta$ 。  $P$  应满足如下公式:

$$P^T S P = D \quad (9)$$

式中,  $S = \{s_{ij}\}_{d \times d}$  为对称系数矩阵, 当  $i=j$  时  $s_{ij}=a_{ij}$ , 否则  $s_{ij}=a_{ij}/2$ ;  $D$  是对角矩阵, 对角线元素为  $b_{2j}$ 。此时,  $P$  和  $D$  分别是特征向量矩阵和特征值矩阵。将  $\xi = P\zeta$  代入公式(8), 可得  $Z$  在  $\zeta$  空间中的二阶无交叉项 PCE 模型, 如下:

$$Z = b_0 + \sum_{j=1}^d b_{1j} \zeta_j + \sum_{j=1}^d b_{2j} \zeta_j^2 \quad (10)$$

其中,

$$b_0 = a_0 - \sum_{i=1}^d a_{ii} \quad (11)$$

$$b_{1j} = \sum_{i=1}^d p_{ij} a_i \quad (12)$$

式中,  $p_{ij}$  表示  $P$  第  $i$  行第  $j$  列的元素;  $b_0$ 、 $b_{1j}$  和  $b_{2j}$  分别是  $\zeta$  空间下二阶 PCE 的零阶、一阶和二阶项系数。由于  $\xi$  为独立标准正态变量, 通过正交变换后的  $\zeta$  同样服从独立标准正态分布。最后, 将公式(10) 代入公式(7)中, 可推导出二阶 PCE 模型其特征函数的解析表达式:

$$\begin{aligned} Q_Z(t) &= E[\exp(itZ)] = \\ &= E\left\{\exp\left[it\left(b_0 + \sum_{j=1}^d b_{1j} \zeta_j + \sum_{j=1}^d b_{2j} \zeta_j^2\right)\right]\right\} = \\ &= \exp(itb_0) \prod_{j=1}^d E\left\{\exp\left[it(b_{1j} \zeta_j + b_{2j} \zeta_j^2)\right]\right\} = \\ &= \exp(itb_0) \prod_{j=1}^d \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[it(b_{1j} \zeta_j + b_{2j} \zeta_j^2)\right] \cdot \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta_j^2\right) d\zeta_j = \\ &= \exp(itb_0) \prod_{j=1}^d \frac{1}{\sqrt{1-2ib_{2j}t}} \exp\left[-\frac{b_{1j}^2 t^2}{2(1-2ib_{2j}t)}\right] \end{aligned} \quad (13)$$

## 2.2 基于 FFT 的二阶 PCE 模型 PDF 计算

文献[28]利用 FFT 计算了由标准正态随机变量构成的功能函数的失效概率, 本文根据 2.1 节中二阶 PCE 模型特征函数的解析解, 可以借助 FFT 快速求得其 PDF。这是由于随机变量的 PDF 和特征函数可以构成一对傅里叶变换:

$$Q_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \exp(itz) dz \quad (14)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Q_Z(t) \exp(-itz) dt \quad (15)$$

式中,  $f(z)$  和  $Q_Z(t)$  分别是随机变量  $Z$  的 PDF 和特征函数。

根据公式(13), 可以求得二阶 PCE 模型特征函数的一系列离散值  $Q_Z(t_s)$  ( $s=1, \dots, M$ ), 其中  $M$  即为傅里叶变换采样点数, 区间  $[t_1, t_M]$  是特征函数的主要分布范围。根据离散傅里叶变换和 PDF 定义, 可推导得到二阶 PCE 模型其 PDF 离散值为:

$$f(z_r) = \frac{t_M - t_1}{2\pi\sqrt{M}} F_r \exp(t_1 z_r), \quad r = 1, \dots, M \quad (16)$$

其中,

$$F_r = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{s=1}^M Q(t_s) \exp\left[\frac{-i(t_M - t_1)(s-1)z_1}{M}\right] \cdot \exp\left[\frac{-2\pi i(r-1)(s-1)z_1}{M}\right] \quad (17)$$

$$z_r = \frac{2\pi(r-1)}{t_M - t_1} + z_1 \quad (18)$$

实际上,  $F_r$  是离散数据  $Q(t_s) \exp\left[\frac{-i(t_M - t_1)(s-1)z_1}{M}\right]$  ( $s=1, \dots, M$ ) 的傅里叶系数, 可由 FFT 快速求得。值得注意的是, 通过选择合适的采样频率和采样点数可获得高精度的 FFT, 因此根据公式(16)~(18)求得的 PCE 的 PDF 基本可认为是精确的。

相应地, 二阶 PCE 模型其累积分布函数(cumulative distribution function, CDF)的离散值可通过对  $f(z_r)$  进行数值积分获得:

$$F(z_r) = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\Delta z}{2} [f(z_k) + f(z_{k+1})], \quad r = 2, \dots, M \quad (19)$$

其中,

$$\Delta z = \frac{2\pi}{t_M - t_1} \quad (20)$$

假设有  $z_m = 0$ , 此时可以很容易地得到二阶 PCE 模型的失效概率:

$$P_f \approx F(z_m) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\Delta z}{2} [f(z_k) + f(z_{k+1})] \quad (21)$$

最后, 根据失效概率可得到相应的可靠度指标:

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (22)$$

综上所述, 根据所推导的二阶 PCE 模型特征函数解析解, 并通过 FFT 方法可快速获得二阶 PCE 模型的精确 PDF, 进而估算结构失效概率。所提方法无需对输出随机变量进行矩估计和概率分布假设, 既可以直接、精确地求解出 PCE 模型的 PDF, 又能高效准确地给出不同响应阈值下结构的失效概率和可靠度指标。

### 3 结构可靠度分析算例

#### 3.1 算例 1: 非中心卡方分布

为验证所提方法求得的二阶 PCE 模型 PDF 的准确性及强非高斯性的情况适用性, 算例 1 假定所构建的二阶 PCE 模型为非中心卡方分布:

$$Z = 0.04n - 0.4 \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (23)$$

式中,  $n$  为非中心卡方分布的自由度;  $X_i$  服从标准正态分布。

本算例中采用  $10^8$  次抽样的 MCS 法和所提方法分别与非中心卡方分布的理论精确解对比, 并通过度量所提方法得到的 PDF 值  $f_1(x)$  与非中心卡方分布值  $f_2(x)$  之间的海林格距离  $H$  来验证所提方法的准确性:

$$H = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{f_1(x)} - \sqrt{f_2(x)})^2} \quad (24)$$

基于 FFT 算法, 采样点数设置为  $2^{26}$ , 并对特征函数进行整周期采样。当非中心卡方分布自由度  $n=3$  时, PCE 模型的偏度为 6.62, 峰度为 45.22。所提方法得到的 PDF 曲线和 CDF 曲线与非中心卡方分布以及 MCS 直方图对比结果分别如图 1 和图 2 所示。PDF 曲线先迅速上升后下降, 海林格距离  $H=3.744 \times 10^{-4}$ 。当非中心卡方分布自由度  $n=10$ , PCE 模型的偏度为 8.94, 峰度为 90.58。所提方法得到的 PDF 曲线和 CDF 曲线与非中心卡方分布以及 MCS 直方图对比结果分别如图 3 和图 4 所示。PDF 曲线先上升后下降, 分布主体区域较自由度为 3 时变大且曲线较为平缓, 海林格距离  $H=7.406 \times 10^{-8}$ 。所提方法获得的 CDF 尾部在  $10^{-8}$  水平可精确吻合, 然而 MCS 所得结果在  $10^{-7}$  水平处出现偏差, 无法得到  $10^{-8}$  水平的精确结果。

考虑随机变量维数较大时的高维情形, 当非中心卡方分布自由度  $n=50$ , 所提方法得到的 PDF 曲线和 CDF 曲线与非中心卡方分布以及 MCS 直方图对比结果分别如图 5 和图 6 所示。PDF 曲线分布主体区域较自由度为 10 时变大且曲线更为平缓, 海林格距离  $H=2.098 \times 10^{-8}$ 。所提方法获得的 PDF 曲线和 CDF 曲线均能够与非中心卡方分布精确吻合。

通过图 1~6 可以得到: (1) 所提方法得到的 PDF 与自由度为 3、10、50 的非中心卡方分布精确吻合良好, 海林格距离分别为  $3.744 \times 10^{-4}$ ,  $7.406 \times$

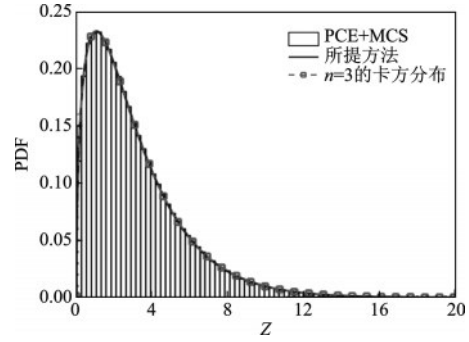


图 1 自由度为 3 的非中心卡方分布的 PDF 结果对比  
Fig.1 Comparison of PDF results for a non-central chi-square distribution with 3 degrees of freedom

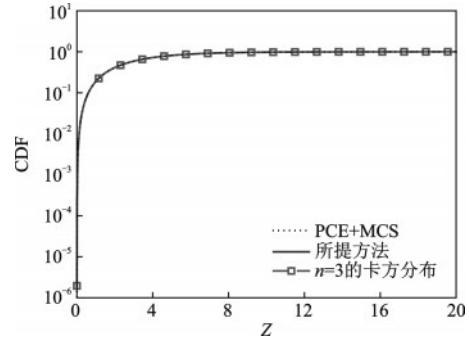


图 2 自由度为 3 的非中心卡方分布的 CDF 结果对比  
Fig.2 Comparison of CDF results for a non-central chi-square distribution with 3 degrees of freedom

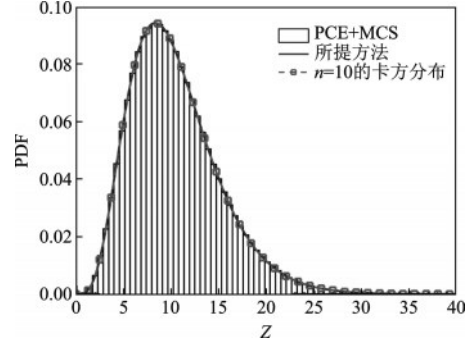


图 3 自由度为 10 的非中心卡方分布的 PDF 结果对比  
Fig.3 Comparison of PDF results for a non-central chi-square distribution with 10 degrees of freedom

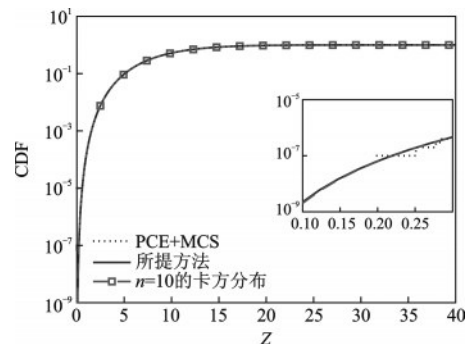


图 4 自由度为 10 的非中心卡方分布的 CDF 结果对比  
Fig.4 Comparison of CDF results for a non-central chi-square distribution with 10 degrees of freedom

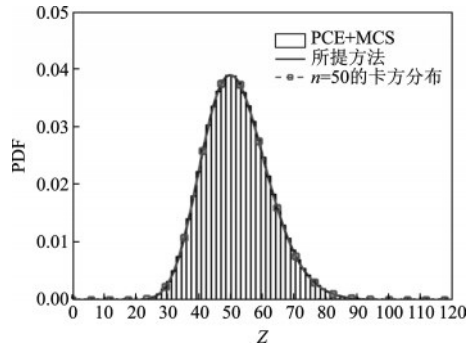


图5 自由度为50的非中心卡方分布的PDF结果对比  
Fig.5 Comparison of PDF results for a non-central chi-square distribution with 50 degrees of freedom

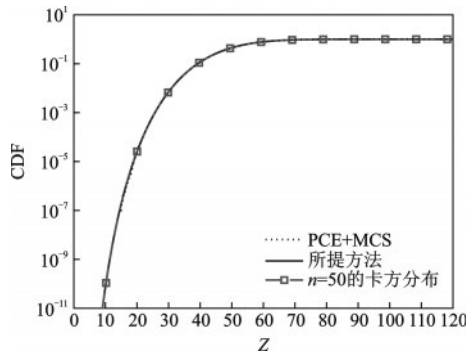


图6 自由度为50的非中心卡方分布的CDF结果对比  
Fig.6 Comparison of CDF results for a non-central chi-square distribution with 50 degrees of freedom

$10^{-8}$ 和 $2.098 \times 10^{-8}$ 。表明所提方法能够精确计算二阶PCE模型的PDF,并且适用于高维问题;(2)PDF变化较平缓时,所提方法获得的CDF尾部与精确值在 $10^{-8}$ 水平上基本一致,较MCS更为准确。说明所提方法对工程中的绝大多数分布均可精确计算且适用于小失效概率问题;(3)本算例中自由度为3、10、50的非中心卡方分布偏度和峰度均较大,超出基于立方正态分布的矩方法<sup>[25]</sup>的适用范围,说明所提方法可以适用于强非高斯分布。

### 3.2 算例2:屋顶结构

为验证所提方法在实际工程问题的准确性和适用性,算例2对屋顶结构<sup>[29]</sup>进行可靠度分析,如图7所示。该结构跨长为 $l$ ,承受均布的垂直荷载 $q$ 。在结构分析过程中,将均布荷载简化为三个节点集中荷载,每个节点集中荷载 $P=0.25ql$ 。该屋顶结构的顶弦和压杆使用材料为混凝土,弹性模量为 $E_c$ ,截面面积为 $A_c$ 。底部绳索和拉杆使用材料为钢材,弹性模量为 $E_s$ ,横截面面积为 $A_s$ 。设定该屋顶结构

的使用极限状态为结构跨中竖向位移等于最大容许竖向位移,相应功能函数为:

$$G(X) = y_{\max} - \frac{ql^2}{2} \left( \frac{3.81}{E_c A_c} + \frac{1.13}{E_s A_s} \right) \quad (25)$$

式中, $y_{\max}$ 为最大容许竖向位移。

本算例中随机变量相互独立,统计信息见表1。

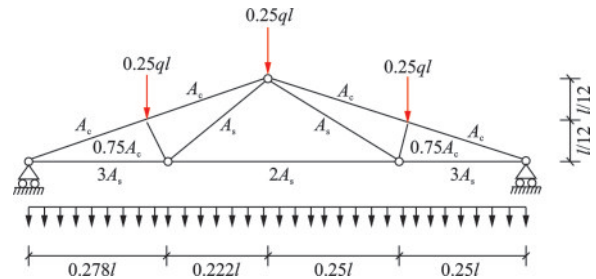


图7 屋架结构

Fig.7 Roof structure

表1 算例2中基本随机变量分布信息

Table 1 Distribution information of basic random variables for Example 2

随机变量	分布类型	均值	变异系数
$q/(N \cdot m^{-1})$	Weibull分布	20 000	0.07
$l/m$	正态分布	12	0.01
$A_s/m^2$	正态分布	$9.82 \times 10^{-4}$	0.06
$A_c/m^2$	正态分布	$400 \times 10^{-4}$	0.12
$E_s/(N \cdot m^{-2})$	正态分布	$1 \times 10^{11}$	0.06
$E_c/(N \cdot m^{-2})$	正态分布	$2 \times 10^{10}$	0.06

本算例采用基于容积公式的选点方法构建二阶PCE模型。该选点方法对 $d > 3$ 有效,容积样本点总数为 $N = d^2 + 3d + 3$ ,容积样本点总数随着随机变量维数的增加较缓慢,即使输入变量较多时,也能保证较高效率。

在本算例中最大容许竖向位移 $y_{\max} = 0.04$ ,将生成的容积样本点集 $\xi^s$ 通过正态变换后输入功能函数 $G(X)$ ,得到功能函数响应值向量 $Z = \{g(\xi_1^s), \dots, g(\xi_j^s), \dots, g(\xi_n^s)\}^T$ ,根据公式(6)可回归得到PCE模型的系数向量。因此,功能函数 $G(X)$ 其在 $\xi$ 空间中的二阶PCE代理模型如下:

$$Z = 0.0163 - 0.0017\xi_1 - 4.79 \times 10^{-4}\xi_2 + 0.0010\xi_3 + 8.75 \times 10^{-4}\xi_4 + 0.0010\xi_5 + 4.22 \times 10^{-4}\xi_6 + \dots + 3.62 \times 10^{-4}\xi_5\xi_6 \quad (26)$$

通过正交变换,可得在 $\zeta$ 空间中的二阶无交叉项PCE模型:

$$\begin{aligned}
Z = & 0.0166 + 0.0022\zeta_1 + 8.42 \times 10^{-4}\zeta_2 - \\
& 1.35 \times 10^{-5}\zeta_3 + 2.11 \times 10^{-4}\zeta_4 + 2.13 \times 10^{-4}\zeta_5 - \\
& 6.84 \times 10^{-4}\zeta_6 - 1.34 \times 10^{-4}\zeta_1^2 - 1.05 \times 10^{-4}\zeta_2^2 - \\
& 2.98 \times 10^{-5}\zeta_3^2 - 1.74 \times 10^{-5}\zeta_4^2 + 4.98 \times 10^{-7}\zeta_5^2 + \\
& 3.17 \times 10^{-5}\zeta_6^2
\end{aligned} \tag{27}$$

根据公式(13),很容易获得该二阶PCE模型的特征函数,这里特征函数离散值个数 $M$ 取为 $2^{26}$ 。当 $t_s \in [-3000, 3000]$ 时,二阶PCE特征函数的实部和虚部分别如图8和图9所示。特征函数的实部和虚部随着 $t_s$ 绝对值的增大均逐渐趋近于0。

为验证所提方法求得的二阶PCE模型PDF的准确性,本算例采用基于立方正态分布的矩方法和PCE模型进行 $10^8$ 次随机抽样的MCS法,分别与所提方法的结果进行对比。其中基于立方正态分布的矩方法利用二阶PCE代理模型前四阶矩的解析解,结合立方正态分布拟合得到PCE模型的PDF和CDF。当最大容许竖向位移 $y_{\max}=0.04$ 时,所提方法、基于立方正态分布的矩方法和MCS( $10^8$ 次抽样)所获得的PDF和CDF曲线分别如图10和图11所示。可以看出,所提方法的PDF较基于立方正态分布的矩方法与MCS直方图结果吻合程度更高,结果更为精确。同时基于立方正态分布的矩方法CDF尾部与MCS和所提方法相比有所偏差且随着CDF的减小逐渐变大。由于MCS抽样次数限制,MCS法的CDF尾部在 $10^{-8}$ 水平出现较大偏差,而所提方法CDF尾部可计算到 $10^{-10}$ 水平。

对于结构可靠度分析,图10和图11中 $Z \leq 0$ 的区域为屋架结构的失效区域,反之则为安全区域。根据统计分析和公式(21),可得到所提方法、基于立方正态分布的矩方法和MCS( $10^9$ 次抽样)的失效概率结果,分别为 $5.383 \times 10^{-8}$ 、 $9.141 \times 10^{-8}$ 和 $5.800 \times 10^{-8}$ ,进一步可算得其可靠度指标分别为5.3133、5.2160和5.2997。这说明即使在小失效概率情况下,所提方法仍能保证极高的准确性和适用性。图12还展示了三种方法得到的可靠度指标 $\beta$ 随最大容许竖向位移 $y_{\max}$ 的变化规律。随着最大容许竖向位移的增大,结构可靠度指标逐渐变大,失效概率逐渐减小,所提方法较基于立方正态分布的矩方法更为精确。同时经计算,不同最大容许竖向位移下所提方法与MCS求得的可靠度指标的相对误差均小于1%。值得注意的是,基于特征函数FFT的可靠度分析方法只需改变起始点 $Z_1$ ,即可方

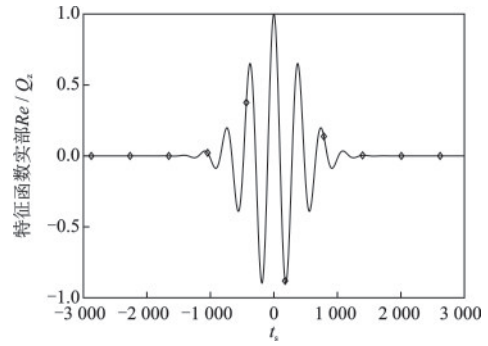


图8 算例2的特征函数实部

Fig.8 The real part of the characteristic function for Example 2

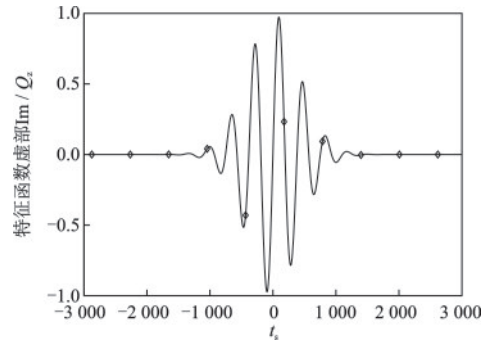


图9 算例2的特征函数虚部

Fig.9 The imaginary part of the characteristic function for Example 2

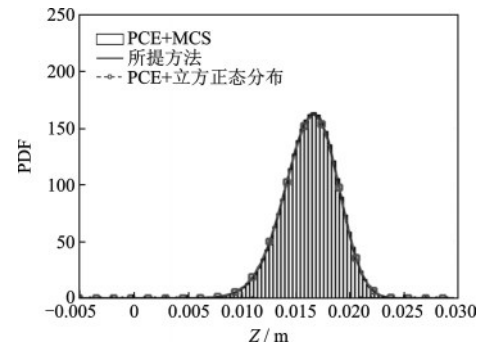


图10 算例2中不同方法的PDF结果对比

Fig.10 Comparison of PDF results of different methods for Example 2

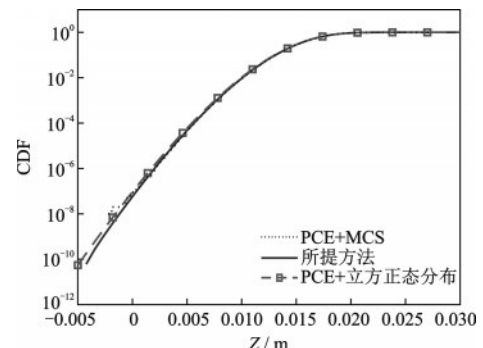


图11 算例2中不同方法的CDF结果对比

Fig.11 Comparison of CDF results of different methods for Example 2

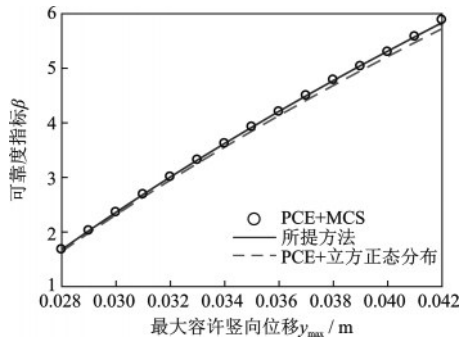


图12 不同最大容许竖向位移下的结构可靠度指标  
Fig.12 Structural reliability indices for different maximum allowable vertical displacements

便的得到相应阈值下的可靠度指标。特别是在小失效概率情况下,所提方法避免了大量抽样计算,较MCS的计算效率大大提高。

### 3.3 算例3:隐式桁架结构

在实际工程结构可靠性分析中,功能函数往往是隐式的。本算例对具有隐式功能函数的二维桁架结构<sup>[30]</sup>进行可靠度分析,如图13所示。桁架结构由11个水平杆和12个斜杆组成,跨度为24 m,上下杆之间的高度为2 m。共10个随机变量组成结构输入向量,表示为:

$$\mathbf{X} = \{E_1, E_2, A_1, A_2, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}^T \quad (28)$$

式中, $A_1$ 和 $E_1$ 分别表示水平杆的横截面积和弹性模量; $A_2$ 和 $E_2$ 是斜杆的横截面积和弹性模量; $P_1 \sim P_6$ 为作用于桁架结构上部节点的垂直荷载。输入随机变量相互独立,统计信息见表2。结构失效定义为结构跨中挠度超过最大容许位移值,其功能函数可由下式给出:

$$G(\mathbf{X}) = s_{\max} - |s(\mathbf{X})| \quad (29)$$

式中, $s_{\max}$ 是最大容许挠度; $s(\mathbf{X})$ 是桁架跨中挠度,由有限元分析得到。

本算例中构建二阶PCE模型所需样本点使用混合精度的容积公式生成<sup>[31]</sup>,容积样本点总数为 $N=2d^2+6d+5$ ,即有265个样本点。根据最小二乘法回归得系数向量,构建起该桁架结构隐式功能函数的二阶PCE代理模型。当最大容许挠度 $s_{\max}=0.12$ 时,所提方法、基于立方正态分布的矩方法和MCS( $10^8$ 次抽样)所获得的PDF和CDF曲线分别如图14和图15所示。可以看出,所提方法与基于立方正态分布的矩方法的PDF曲线均与MCS直方图结果十分吻合,具有很高的精度。基于立方正态分布的矩方法和MCS的CDF曲线尾部在 $10^{-8}$

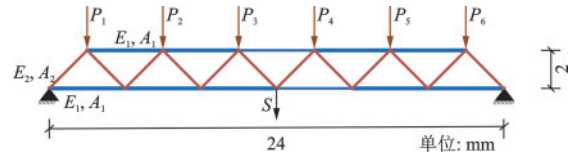


图13 桁架结构

Fig.13 Truss structure

表2 算例3中基本随机变量分布信息

Table 2 Distribution information of basic random variables for Example 3

随机变量	分布类型	均值	变异系数
$E_1, E_2/\text{Pa}$	对数正态分布	$2.1 \times 10^{11}$	0.1
$A_1/\text{m}^2$	对数正态分布	$2.0 \times 10^{-3}$	0.1
$A_2/\text{m}^2$	对数正态分布	$1.0 \times 10^{-3}$	0.1
$P_1, \dots, P_6/\text{N}$	Gumbel分布	$5.0 \times 10^4$	0.15

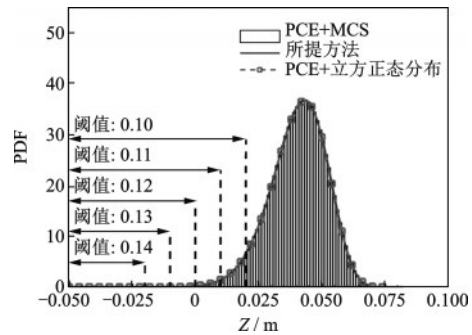


图14 算例3中不同方法的PDF结果对比

Fig.14 Comparison of PDF results of different methods for Example 3

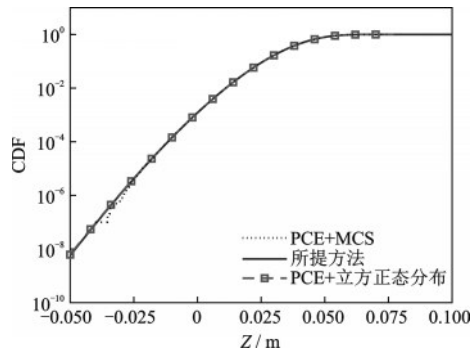


图15 算例3中不同方法的CDF结果对比

Fig.15 Comparison of CDF results of different methods for Example 3

水平处出现偏差。所提方法、基于立方正态分布的矩方法和MCS的失效概率分别为 $1.204 \times 10^{-3}$ 、 $1.209 \times 10^{-3}$ 和 $1.200 \times 10^{-3}$ ,进一步可算得其可靠度指标分别为3.034 6、3.033 4和3.035 3。由于不同挠度阈值下的功能函数仅相差个常数,因此不同挠度阈值下的失效概率可转化为PCE模型( $s_{\max}=0.12$ )在不同位置处的CDF值,如图14所示。

为进一步考察PCE模型非高斯性的影响,采用3种方法分别计算了不同输入变异系数下的结构可靠度指标。为反映PCE模型其分布偏离正态分布的程度,定义距离 $D=\alpha_{3Z}^2+(\alpha_{4Z}-3)^2$ ,其中 $\alpha_{3Z}$ 和 $\alpha_{4Z}$ 分别为PCE模型的偏度和峰度。当桁架结构水平杆弹性模量 $E_1$ 的变异系数分别为0.50、0.55、0.60、0.65、0.70、0.75、0.80时,计算得到的距离 $D$ 分别为5.207 2、6.074 6、6.844 0、7.472 3、7.926 3、8.184 1、8.235 0。3种方法算得的可靠度指标 $\beta$ 随距离 $D$ 的变化规律如图16所示。由图可知,随着距离 $D$ 的增加,即PCE模型非高斯性的增强,三种方法所得的结构可靠度指标均逐渐减小。当距离 $D$ 较小时,基于立方正态分布的矩方法所得的可靠度指标与其他两种方法的结果较为接近,但随着距离 $D$ 逐渐增大,矩方法的可靠度指标逐渐偏离其他两种方法的结果。然而,所提方法与MCS的可靠度指标始终结果保持一致。

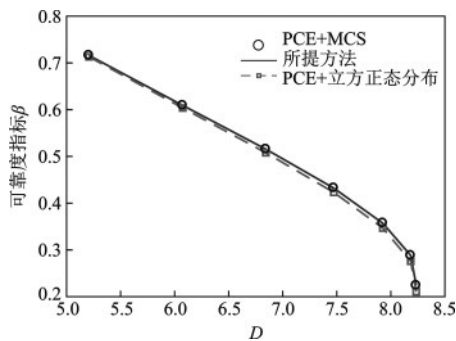


图16 不同距离 $D$ 下的结构可靠度指标

Fig.16 Structural reliability indices for different distances  $D$

为了更好地展现不同方法的适用性和准确性,图17还给出了矩方法和MCS的可靠度指标相比所提方法结果的相对误差随距离 $D$ 的变化曲线。随着距离 $D$ 的增大,基于立方正态分布的矩方法计算的可靠度指标相对误差逐渐变大。当 $D>8$ 时,矩

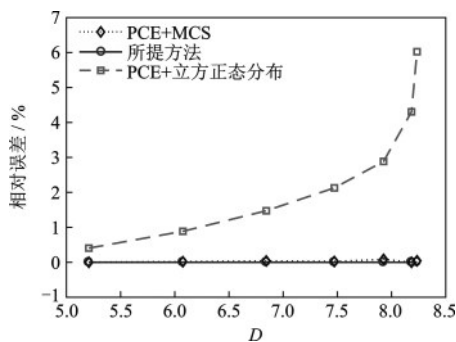


图17 不同距离 $D$ 下可靠度指标的相对误差

Fig.17 Relative errors of reliability index for different distances  $D$

方法其可靠度指标的相对误差大于6%,而MCS与所提方法的相对误差始终小于0.5%。因此,相较于立方正态分布的矩方法,所提方法的计算精度更高,适用范围更广,对于变异系数较大、输出变量具有强非高斯性的情形其依然适用。

### 3.4 算例4:强非线性功能函数

本算例考虑具有强非线性的功能函数,其表达式如下:

$$G(X) = X_1 - 10^4 \left( \frac{X_2(X_4X_5)^{1.71}}{X_3} + \frac{(1-X_2)(X_4X_5)^{1.188}}{X_6} \right) \quad (30)$$

上式共包含6个相互独立的随机变量,统计信息见表3。

表3 算例4中基本随机变量分布信息

Table 3 Distribution information of basic random variables for Example 4

随机变量	分布类型	均值	变异系数
$X_1$	对数正态分布	1.044	0.3
$X_2$	正态分布	0.7	0.1
$X_3$	对数正态分布	0.239 1	0.4
$X_4$	对数正态分布	1.011	0.15
$X_5$	Gumbel分布	0.000 5	0.16
$X_6$	对数正态分布	1.802	0.4

为考虑二阶PCE模型在代理强非线性功能函数时的局限性,本算例首先采用基于容积公式的选点方法构建了二阶PCE模型。其次,通过文献[29]中稀疏PCE模型构建方法,利用2 000个Sobol序列点构建了稀疏的三阶PCE模型。所提方法获得二阶PCE模型的PDF曲线与功能函数的MCS( $10^8$ 次抽样)直方图结果对比如图18所示。可以看出,所

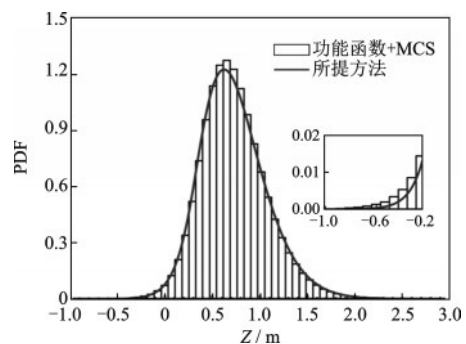


图18 二阶PCE模型的PDF结果对比

Fig.18 The comparison of PDF result of the second-order PCE model

提方法获得的PDF曲线与功能函数的MCS结果有所偏差,主要是在分布峰值处和尾部。

利用MCS法对三阶PCE模型进行抽样模拟。所提方法获得的CDF曲线与三阶PCE模型以及原始功能函数的MCS抽样模拟所获得的经验CDF曲线进行对比,其结果如图19所示。

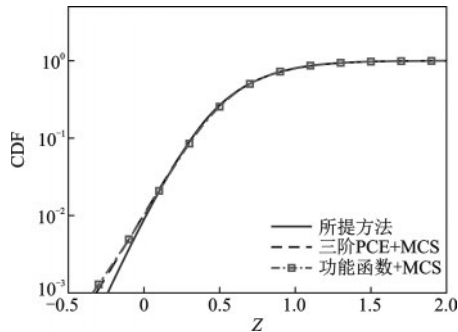


图19 不同阶数PCE模型的CDF结果对比

Fig.19 Comparison of CDF results for PCE models of different orders

根据图19可知,所提方法得到的CDF曲线与原始功能函数的结果在左尾处有较大偏差,而三阶PCE模型和原功能函数的结果相吻合。所提方法得到的可靠度指标为2.3710。三阶PCE模型和功能函数抽样模拟所获得的可靠度指标分别为2.3136和2.3224。结果表明,所提方法的计算误差主要来源于二阶PCE模型的拟合误差;对于强非线性功能函数,二阶PCE模型并不足以描述的情形,所提方法将产生不小的误差,此时需要采用更高阶的PCE模型进行分析。因此,所提方法对于强非线性问题存在一定局限性。

## 4 结 论

针对现有数值模拟法和矩方法在计算PCE代理模型的失效概率中所存在的效率低、分布假定、概率信息不完备等问题,提出了基于二阶PCE模型PDF精确计算的结构可靠度方法,推导出二阶PCE模型特征函数的显示表达式,利用FFT求得PCE模型其PDF,并据此估算目标结构的失效概率及可靠度指标。研究表明:

(1)所提方法计算得到的PDF和CDF与理论精确解完全一致,可适用于输出变量分布的偏度、峰度较大,输入变量维数较高的情况。

(2)所提方法计算得到的二阶PCE模型的PDF

和CDF与MCS结果基本完全一致,能够高效准确地给出不同响应阈值下的结构失效概率,即使失效概率接近 $10^{-8}$ ;并且针对小失效概率问题,所提方法相较于MCS( $10^9$ 次抽样)可以提高可靠度分析效率。

(3)相较于基于立方正态分布的矩方法,所提方法的计算精度更高,且适用范围更广,对于输入变量变异性较大、输出变量具有强非高斯性的情况依然适用。

(4)二阶PCE模型代理强非线性功能函数时可能存在一定误差,因此所提方法对于强非线性问题存在一定局限性。

## 参考文献:

- [1] 张丽波,郭将,刘晓.响应面法与蒙特卡洛法边坡可靠性评价方法对比研究[J].武汉大学学报(工学版),2016,49(5):779-786.  
Zhang L B, Guo J, Liu X. Comparative study of methodologies between response surface methods and Monte Carlo methods in slope reliability analysis[J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2016, 49(5): 779-786. (in Chinese)
- [2] 刘健,晏铖,方其样,等.基于响应面法与JC法结合的大跨度桥梁可靠度分析[J].桥梁建设,2022,52(4):32-38.  
Liu J, Yan C, Fang Q Y, et al. Reliability analysis of long-span bridges based on combination of response surface method and JC method[J]. Bridge Construction, 2022, 52(4): 32-38. (in Chinese)
- [3] Wang T, Yang X F, Mi C Y. An efficient hybrid reliability analysis method based on active learning Kriging model and multimodal-optimization-based importance sampling[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2021, 122(24): 7664-7682.
- [4] Zhao Z, Lu Z H, Zhao Y G. An efficient extreme value moment method combining adaptive Kriging model for time-variant imprecise reliability analysis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 171: 108905.
- [5] Sinou J J, Denimal E. Reliable crack detection in a rotor system with uncertainties via advanced simulation models based on kriging and Polynomial Chaos Expansion[J]. European Journal of Mechanics / A Solids, 2022, 92: 104451.
- [6] Tomy G J K, Vinoy K J. A fast polynomial chaos expansion for uncertainty quantification in stochastic elec-

- tromagnetic problems[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2019, 18(10): 2120-2124.
- [7] Wiener N. The homogeneous chaos[J]. American Journal of Mathematics, 1938, 60(4): 897-936.
- [8] Xiu D, Karniadakis G E. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos[J]. Journal of Computational Physics, 2003, 187(1): 137-167.
- [9] Witteveen J A S, Bijl H. Modeling arbitrary uncertainties using Gram-Schmidt polynomial chaos [C] //44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, NV, USA: AIAA, 2006.
- [10] Oladyshkin S, Nowak W. Data-driven uncertainty quantification using the arbitrary polynomial chaos expansion [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2012, 106: 179-190.
- [11] Wei D L, Cui Z S, Chen J. Uncertainty quantification using polynomial chaos expansion with points of monomial cubature rules [J]. Computers & Structures, 2008, 86(23): 2102-2108.
- [12] Hamoton J, Doostan A. Basis adaptive sample efficient polynomial chaos (BASE-PC)[J]. Journal of Computational Physics, 2018, 371: 20-49.
- [13] 陈光宋, 钱林方, 吉磊. 身管固有频率高效全局灵敏度分析[J]. 振动与冲击, 2015, 34(21): 31-36.  
Chen G S, Qian L F, Ji L. An effective global sensitivity analysis method for natural frequencies of a barrel[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(21): 31-36.
- [14] Blatman G, Sudret B. Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression[J]. Journal of Computational Physics, 2010, 203(6): 2345-2367. (in Chinese)
- [15] 缙变彩, 王帆. 基于稀疏混沌多项式的边坡可靠度分析方法[J]. 土木工程与管理学报, 2021, 38(2): 198-204, 210.  
Guo B C, Wang F. Sparse polynomial chaos expansion method for slope reliability analysis[J]. Journal of Civil Engineering and Management, 2021, 38(2): 198-204, 210. (in Chinese)
- [16] Zhang Y, Xu J. Efficient reliability analysis with a CDA-based dimension-reduction model and polynomial chaos expansion[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 373: 113467.
- [17] Hasofer A M, Lind N C. Exact and invariant second-moment code format[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1974, 100(1): 111-121.
- [18] Breitung K. Asymptotic approximations for multinormal integrals[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1984, 110(3): 357-366.
- [19] 吴帅兵, 李典庆, 周创兵. 联合分布函数蒙特卡罗模拟及结构可靠度分析[J]. 工程力学, 2012, 29(9): 68-74.  
Wu S B, Li D Q, Zhou C B. Monte Carlo simulation of multivariate distribution and its application to structural reliability analysis [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(9): 68-74. (in Chinese)
- [20] Vincent D, Bruno S, Jean-Marc B. Reliability-based design optimization using kriging surrogates and subset simulation[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 44(5): 673-690.
- [21] Liu Q, Homma T. A new computational method of a moment-independent uncertainty importance measure [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2009, 94(7): 1205-1211.
- [22] Zhao Y G, Lu Z H. Structural reliability: approaches from perspectives of statistical moments[D]. Hoboken: Wiley, 2021.
- [23] Pearson K. Contributions to the mathematical theory of evolution, II: skew variation in homogeneous material [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A, 1895, 186: 343-414.
- [24] Low Y M. A new distribution for fitting four moments and its applications to reliability analysis [J]. Structural Safety, 2013, 42: 12-25.
- [25] Zhao Y G, Zhang X Y, Lu Z H. A flexible distribution and its application in reliability engineering[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2018, 176: 1-12.
- [26] Wei X, Chang H C, Feng B W, et al. Hull form reliability-based robust design optimization combining polynomial chaos expansion and maximum entropy method [J]. Applied Ocean Research, 2019, 90: 101860.
- [27] Winterstein S R, Kashef T. Moment-based load and response models with wind engineering applications [J]. Journal of Solar Energy Engineering, 2000, 122(3): 122-128.
- [28] Zhao Y G, Ono T. New approximations for SORM: Part 2 [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1999, 125(1): 86-93.
- [29] Xu J, Kong F. A cubature collocation based sparse polynomial chaos expansion for efficient structural reliability analysis[J]. Structural Safety, 2018, 74: 24-31.
- [30] Vahedi J, Ghasemi M R, Miri M. An adaptive divergence-based method for structural reliability analysis via multiple Kriging models [J]. Applied Mathematical Modelling, 2018, 62: 542-561.
- [31] Xu J, Zhou L J. An adaptive trivariate dimension-reduction method for statistical moments assessment and reliability analysis [J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 82: 748-765.

(本文编辑:赵霞)